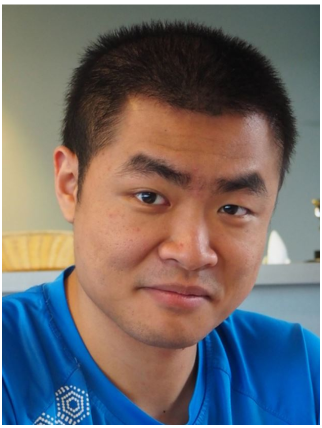
Énumération des cartes combinatoires

Wenjie Fang [1]

Wenjie Fang a soutenu sa thèse [2] en octobre 2016 à l'université Paris-Diderot, thèse préparée à l'Institut de recherche en informatique fondamentale (IRIF) et au Laboratoire bordelais de recherche en informatique (LaBRI), sous la direction de Guillaume Chapuy et Mireille Bousquet-Mélou. Il effectue actuellement un stage postdoctoral au sein de l'Institut de mathématiques discrètes de l'université de technologie de Graz, en Autriche.



Aujourd'hui, les animations 3D sont partout, où chaque objet est modélisé avec un maillage bien dense, qui fournit une discrétisation fidèle de la surface représentée. L'abstraction de ces maillages porte un autre nom dans le domaine de la combinatoire, à savoir *carte combinatoire*, ou tout simplement *carte*. Pendant ma thèse, je me suis intéressé à l'étude énumérative des cartes. Quel est le nombre, exact ou asymptotique, des cartes vérifiant telle ou telle propriété, en fixant des paramètres divers et variés ? Cette question, que l'on se pose toujours en *combinatoire énumérative*, est le sujet de ma thèse.

Ces questions de comptage, théoriques à première vue, sont parfois reliées profondément à des applications. Par exemple, le

1. https://www.math.tugraz.at/~fang/
2. « Aspects énumératifs et bijectifs des cartes combinatoires : généralisation, unification et application », http://www.theses.fr/s180028.

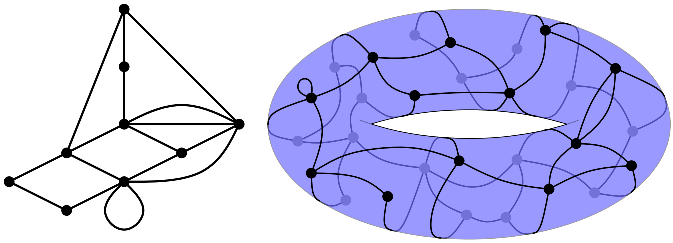


FIGURE 1. Deux exemples de cartes

comptage asymptotique des triangulations donne une borne inférieure du nombre de bits nécessaires pour encoder les maillages triangulaires, puis une étude combinatoire des cartes en donne un codage optimal [7]. Outre l'informatique, l'énumération des cartes a aussi des liens profonds avec d'autres domaines, surtout les probabilités, l'algèbre et la physique théorique, grâce à sa double nature géométrique et algébrique.

En tant qu'objet géométrique, une carte peut être vue comme une discrétisation des surfaces. Ce point de vue lui donne le rôle de la base d'un objet probabiliste nommé *carte brownienne* [6], un modèle de surface aléatoire en probabilité. La carte brownienne est à son tour exploitée en physique théorique comme un modèle d'espace bi-dimensionnel.

Une autre famille d'objets probabilistes, les *cartes infinies uniformes* [1], reposant également sur la notion de carte, est utilisée en tant que réseau aléatoire sur lequel se jouent les processus aléatoires. L'énumération des cartes est alors pertinente dans l'étude de ces objets probabilistes.

L'aspect algébrique des cartes provient du codage des cartes par des permutations. Une carte peut être vue comme un recollage propre de polygones, dont les arêtes sont couplées puis recollées. Un tel recollage est codé par deux permutations, l'une spécifiant les polygones, l'autre le couplage. Ce codage, aussi utilisé dans l'industrie pour les maillages, nous permet d'exprimer le nombre de cartes avec des outils algébriques comme la théorie de représentation du groupe symétrique. En passant par cet aspect algébrique, le comptage des cartes est mis en relation avec la hiérarchie KP [5], un système intégrable provenant de la physique des ondes, et également avec les intégrales matricielles en mécanique quantique [2].

Cette liste des applications des cartes à d'autres domaines n'est pas exhaustive, mais elle suffit à en démontrer la richesse. Au centre de ces domaines divers, l'étude énumérative des cartes tire profit de nombreuses méthodes de provenances variées.

Le travail fondateur de Tutte, dans sa série d'articles [9], est basé sur les séries génératrices et les équations fonctionnelles. L'approche par bijections combinatoires, mise en scène par Schaeffer dans sa thèse, révèle la structure cachée des cartes d'une façon intuitive. L'énumération asymptotique des cartes est alors possible grâce à la combinatoire analytique [4]. Enfin, une méthode provenant du calcul des intégrales matricielles en physique, la « récurrence topologique » [3], est bien utile dans l'énumération des cartes. Un bilan plus détaillé et exhaustif se trouve dans [8].

Les travaux que j'ai effectués pendant ma thèse touchent à la fois les aspects géométriques et algébriques des cartes, en employant, et parfois en étendant, toutes les méthodes mentionnées auparavant pour résoudre deux types de problèmes : l'énumération des cartes non planaires, et l'énumération des autres objets combinatoires au travers de leur liens avec les cartes.

Mon approche de l'énumération des cartes non planaires est plutôt algébrique et symbolique. À l'aide du lien entre les cartes et le groupe symétrique, j'ai montré une relation énumérative entre deux familles de cartes, les *constellations* et les *hypercartes*, en généralisant une relation existante sur les quadrangulations. Ce travail est une rare manifestation de la théorie de représentation en informatique. Puis, avec les fonctions génératrices, j'ai étudié avec mon directeur l'énumération des constellations, planaires et de genre supérieur. Dans les deux cas, de nouvelles méthodes pour résoudre des équations fonctionnelles sont utilisées, qui peuvent être appliquées aux autres problèmes d'énumération.

Les cartes sont également utilisées comme un outil pour étudier d'autres objets, via des bijections naturelles. Dans cette direction, partiellement en collaboration, j'ai découvert une famille de liens bijectifs entre certaines familles de cartes planaires et d'intervalles dans un ordre partiel en combinatoire algébrique, nommé *treillis de Tamari*, qui est défini sur les arbres binaires avec l'opération de rotation d'arbre. Ces liens bijectifs, tout nouveaux et à explorer, m'ont permis d'obtenir des résultats énumératifs et structurels sur ces objets. Toujours avec des opérations bijectives, en collaboration avec l'équipe de graphes aléatoires de TU Graz, j'ai établi le comptage asymptotique des graphes plongeables dans une surface donnée. Ce résultat, dans la preuve duquel la combinatoire analytique est centrale, est une première étape vers l'analyse des graphes aléatoires avec contrainte de plongement.

Ce qui me semble être le plus pertinent dans mes travaux, ce ne sont pas les résultats spécifiques, mais les nouvelles méthodes et liens qui en émergent. Les méthodes que j'ai utilisées pour compter les constellations, la méthode « différentielle-catalytique » de Bousquet-Mélou–Chapuy–Préville-Ratelle et la récurrence topologique d'Eynard-Orantin, ont un grand potentiel. Mes efforts pour les comprendre et en découvrir d'autres applications sont encore en cours. Pour les liens bijectifs entre les cartes planaires et les intervalles du treillis de Tamari, toujours en suivant la même méthodologie, j'ai étendu récemment la portée de cette famille de liens en établissant de nouvelles bijections qui pourraient mener à une ouverture pour comprendre les symétries mystérieuses de certaines familles d'intervalles.

L'étude des cartes, nourrie par des idées issues de domaines divers, évolue à grande vitesse. Je suis particulièrement heureux d'y participer et d'y contribuer.

Références

[1] O. Angel and O. Schramm. Uniform infinite planar triangulations. In *Selected works of Oded Schramm. Volume 1, 2*, Sel. Works Probab. Stat., pages 547–569. Springer, New York, 2011.

[2] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, and J.-B. Zuber. Planar diagrams. In *The Large N Expansion In Quantum Field Theory And Statistical Physics : From Spin Systems to 2-Dimensional Gravity*, pages 567–583. World Scientific, 1993.

[3] B. Eynard and N. Orantin. Topological recursion in enumerative geometry and random matrices. *J. Phys. A*, 42(29) :293001, 117, 2009.

[4] Ph. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[5] I. P. Goulden and D. M. Jackson. The KP hierarchy, branched covers, and triangulations. *Adv. Math.*, 219(3) :932–951, 2008.

[6] J.-F. Marckert and A. Mokkadem. Limit of normalized quadrangulations : the Brownian map. *Ann. Probab.*, 34(6) :2144–2202, 2006.

[7] D. Poulalhon and G. Schaeffer. Optimal coding and sampling of triangulations. *Algorithmica*, 46(3-4) :505–527, 2006.

[8] G. Schaeffer. Planar maps. In *Handbook of Enumerative Combinatorics*. CRC Press, 2015.

[9] W. T. Tutte. A census of planar maps. *Canad. J. Math.*, 15 :249–271, 1963.